



Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

ANALISI DIMENSIONALE



Misura di una grandezza fisica

► Misura di una grandezza fisica

- Rapporto fra la grandezza e una grandezza campione della stessa specie, assunta come unità
 - Rapporto da eseguire con modalità determinate
 - variando la grandezza campione (unità di misura) il rapporto delle misure di due grandezze della stessa specie si mantiene inalterato
 - ✓ Il rapporto ha un *valore oggettivo*
 - Le grandezze campione devono essere inalterabili e riproducibili.
 - Un insieme di grandezze campione definisce un *sistema di unità di misura (sistema di misurazione)*
- ✓ Esempio: energia cinetica di un corpo di massa m e velocità di traslazione u

$$E_c = \frac{1}{2}mu^2 = E_c^* E_{c_u}$$

- E_c^* misura
- E_{c_u} unità di misura (grandezza campione)



Sistemi di unità di misura

► Grandezze fisiche

- Fondamentali
 - Derivate: esprimibili in funzione delle grandezze fondamentali
 - Le grandezze fondamentali devono essere indipendenti (una non deducibile dalle altre)
- m, s, kg ✓ m, s, N ✓ m, m/s, kp ✓ m, kg, N ✓ m, s, m/s ✗ m/s², kg, N ✗

► Sistemi di unità di misura coerenti

- Grandezze della stessa specie (lunghezza, tempo, forza, etc...) sono misurate con la stessa unità di misura
- equazioni fra misure formalmente identiche a equazioni fra grandezze

$$✓ \quad E_c^* = \frac{1}{2} m^* u^{*2}$$

$$✓ \quad E_c = E_c^* E_{cu} = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} (m^* m_u) (u^* u_u)^2 = \frac{1}{2} m^* u^{*2} m_u u_u^2 \longrightarrow E_{cu} = m_u u_u^2$$

$$✓ \quad E_{cu} = m_u u_u^2 \quad \text{equazione dimensionale}$$

- Sistema coerente: Sistema Internazionale (S.I.); kg, m, s fondamentali; N forza: $f = ma$ e $f^* = m^* a^*$
- Sistema non coerente: sistema con kg, m, s fondamentali, kp = g* N forza: $f = ma$ ma $f^* = \frac{1}{g^*} m^* a^*$



Equazioni dimensionali

► Equazioni fra unità di misura ($E_{cu} = m_u u_u^2$)

- In particolare, può esprimere l'unità di misura di una grandezza in funzione delle grandezze fondamentali
- Equazioni dimensionali esprimono unità di misura come prodotti di potenze di grandezze fondamentali

$$\vartheta_u = \vartheta_{u1}^\alpha \vartheta_{u2}^\beta \vartheta_{u3}^\gamma$$

- Dimensioni fisiche di una grandezza: potenze grandezze fondamentali (α, β, γ) in equazione dimensionale

✓ Esempio:

○ $u = \frac{l}{t}$ (velocità)

○ $u_u = l_u t_u^{-1}$ (equazione dimensionale velocità)

○ $E_{cu} = m_u u_u^2 = m_u l_u^2 t_u^{-2}$ (equazione dimensionale energia cinetica)

- Espressione di una grandezza fisica in funzione delle grandezze fondamentali del sistema di misura

$$\vartheta = \vartheta^* \vartheta_{u1}^\alpha \vartheta_{u2}^\beta \vartheta_{u3}^\gamma$$

✓ $\vartheta_{u1}^\alpha \vartheta_{u2}^\beta \vartheta_{u3}^\gamma = m_u l_u^2 t_u^{-2}$; $\vartheta^* = \frac{1}{2} m^* u^{*2}$ nell'esempio dell'energia cinetica



Grandezze adimensionali

► Numeri puri

$\vartheta = \vartheta^* \vartheta_u = \vartheta^* \vartheta_{u1}^\alpha \vartheta_{u2}^\beta \vartheta_{u3}^\gamma$ è un *numero puro* (grandezza adimensionale) se e solo se $\alpha = \beta = \gamma = 0$

- Proprietà delle grandezze adimensionali

- Cambiamento di unità fondamentali della stessa specie

$$\vartheta_{u1} = r_1 \vartheta'_{u1} ; \vartheta_{u2} = r_2 \vartheta'_{u2} ; \vartheta_{u3} = r_3 \vartheta'_{u3}$$

- Espressione della grandezza nel nuovo sistema di unità di misura

$$\vartheta = \vartheta^* (r_1 \vartheta'_{u1})^\alpha (r_2 \vartheta'_{u2})^\beta (r_3 \vartheta'_{u3})^\gamma = \vartheta^* r_1^\alpha r_2^\beta r_3^\gamma \vartheta'_{u1}^\alpha \vartheta'_{u2}^\beta \vartheta'_{u3}^\gamma = (\vartheta^*)' \vartheta'_{u1}^\alpha \vartheta'_{u2}^\beta \vartheta'_{u3}^\gamma$$

- Misura della grandezza nel nuovo sistema di unità di misura

$$(\vartheta^*)' = \vartheta^* r_1^\alpha r_2^\beta r_3^\gamma$$

✓ $(\vartheta^*)' = \vartheta^*$ se $\alpha = \beta = \gamma = 0$

✓ Le grandezze adimensionali (numeri puri) non variano per cambiamento di sistema di unità di misura



Omogeneità dimensionale

- ▶ In una relazione fra grandezze fisiche
 - primo e secondo membro devono essere dimensionalmente omogenei
 - si possono sommare soltanto grandezze dimensionalmente omogenee
- ▶ Controllo dimensionale di una legge fisica
 - L'omogeneità dimensionale è condizione necessaria per la validità di una legge fisica
 - Una relazione dimensionalmente non omogenea è certamente errata
 - L'omogeneità dimensionale non è condizione sufficiente per la validità di una legge fisica
 - non garantisce la correttezza dei coefficienti numerici
 - non garantisce assenza di errori dovuti a grandezze di diversa specie aventi le stesse unità di misura
 - ✓ Esempio: energia e momento di una forza si misurano entrambe in N m
- ▶ Grandezze dimensionalmente indipendenti

$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ dimensionalmente indipendenti se $\vartheta_1^\alpha \vartheta_2^\beta \vartheta_3^\gamma$ è adimensionale solo per $\alpha = \beta = \gamma = 0$

 - ✓ Le grandezze fondamentali di un sistema di misura devono essere dimensionalmente indipendenti



Teorema del Pigreco

- Un fenomeno fisico è descritto da una relazione fra n grandezze coinvolte nel fenomeno (legge fisica)
 $F(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_i, \dots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n) = 0$ (necessaria conoscenza preliminare delle grandezze rilevanti)
- Scelta di m delle n grandezze come grandezze fondamentali di un particolare sistema di unità di misura:
 $\vartheta_{u1} = \vartheta_1$, $\vartheta_{u2} = \vartheta_2$, $\vartheta_{u3} = \vartheta_3$ (m=3 in Meccanica)
 - Equazione dimensionale grandezza generica: $\vartheta_{ui} = \vartheta_{u1}^{\alpha_i} \vartheta_{u2}^{\beta_i} \vartheta_{u3}^{\gamma_i} = \vartheta_1^{\alpha_i} \vartheta_2^{\beta_i} \vartheta_3^{\gamma_i}$
 - Espressione grandezza generica : $\vartheta_i = \pi_i \vartheta_1^{\alpha_i} \vartheta_2^{\beta_i} \vartheta_3^{\gamma_i}$ $\pi_i = \frac{\vartheta_i}{\vartheta_1^{\alpha_i} \vartheta_2^{\beta_i} \vartheta_3^{\gamma_i}}$ adimensionale (*numero indice*)
 ✓ $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$; $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$; $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1$
- Sostituendo nella legge rappresentativa del fenomeno si ottiene
 $F(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots, \pi_i \vartheta_1^{\alpha_i} \vartheta_2^{\beta_i} \vartheta_3^{\gamma_i}, \dots, \pi_n \vartheta_1^{\alpha_n} \vartheta_2^{\beta_n} \vartheta_3^{\gamma_n}) = 0$ ossia $\Phi(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \pi_4, \pi_5, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n) = 0$
- In un sistema coerente le relazioni fra le grandezze sono identiche alle relazioni fra le misure
 $\Phi(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n) = 0 \implies \varphi(\pi_4, \pi_5, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n) = 0$ espressione del Teorema del Pigreco:

in un sistema di misurazione coerente composto da m grandezze fondamentali, una legge fisica fra n grandezze dimensionali può essere ricondotta a una relazione fra $n-m$ numeri indice.



Analisi per ordini di grandezza

- Analisi dei fenomeni fisici attraverso analisi degli ordini di grandezza delle grandezze coinvolte
 - Riconoscimento di regimi di moto sostanzialmente differenti (p.es.: moto laminare - moto turbolento)
 - Semplificazione della descrizione di un processo fisico (p.es.: efflusso quasi stazionario da luci se $\Omega \ll \Sigma$)
- Esempio: Eq. di Navier-Stokes per campo di moto di onda cilindrica (moto piano nel piano x-z)

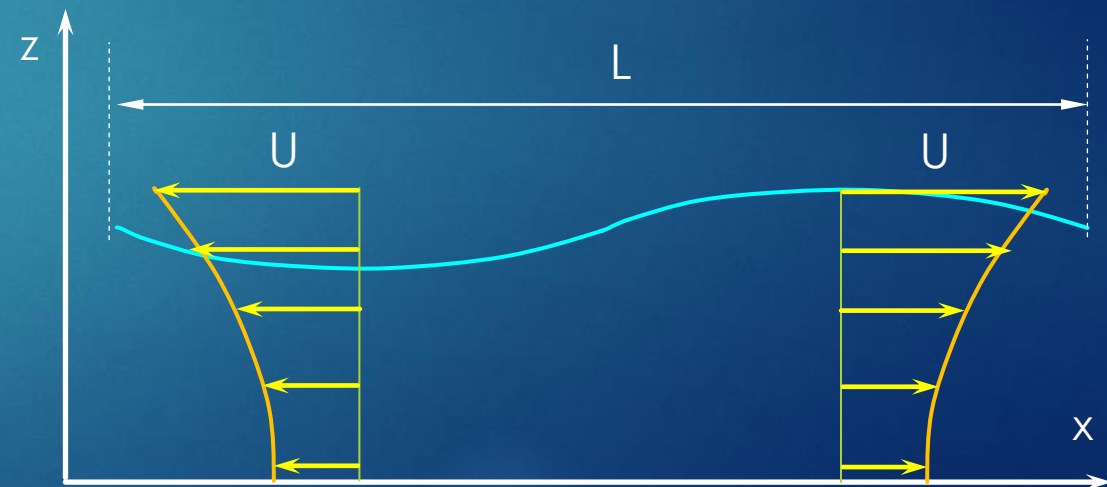
$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}$$

- All'ingrosso, la velocità orizzontale varia dal valore $-U$ al valore $+U$ in metà della lunghezza d'onda L
- ✓ U, L grandezze scala (o caratteristiche) del moto

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} u_x \sim \frac{U - (-U)}{L/2} U \sim 4 \frac{U^2}{L} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \sim \nu \frac{\frac{U - (-U)}{L/2} - \frac{-U - U}{L/2}}{L/2} \sim \nu 16 \frac{U}{L^2} \sim \nu \frac{U}{L^2}$$


$$f_m \sim g$$





Analisi per ordini di grandezza

► Numeri puri rappresentativi dei rapporti fra gli ordini di grandezza di termini specifici

- Numero di Reynolds: $Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} \sim \frac{u_x \partial u_x / \partial x}{\nu \partial^2 u_x / \partial x^2}$ o.d.g. rapporto fra termini convettivi e termini viscosi
- Numero di Froude: $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} = \sqrt{\frac{U^2/L}{g}} \sim \sqrt{\frac{u_x \partial u_x / \partial x}{g}}$ o.d.g. rapporto fra termini convettivi e gravità
 - ✓ $Re \ll 1$  termini convettivi (non lineari) trascurabili rispetto a termini viscosi (dissipativi), e viceversa
 - ✓ Re importante in studio della turbolenza
 - ✓ Fr importante in studio correnti a pelo libero
- Altri numeri puri definibili per Eq. di Navier-Stokes
 - $St = \frac{L}{UT}$ N. di Strouhal $\sim \frac{\text{inerzia locale}}{\text{inerzia convettiva}}$
 - $Eu = \frac{P}{\rho_0 U^2}$ N. di Eulero $\sim \frac{\text{forze di pressione}}{\text{inerzia convettiva}}$
 - ✓ T, P, ρ_0 tempo, pressione e densità caratteristiche
- Importanza in studi su modello fisica in scala (similitudine geometrica, cinematica e dinamica)

